Lösungen zur 10. Mathe-Nacht

Analysis 2, Sommersemester 2020

Warnhinweis: Die Lösungen wurden nicht auf ihre Richtigkeit überprüft. Wer Fehler findet, meldet diese bei mara.jakob@mathematik.uni-halle.de

10. Mathe Nacht

Integrale - Lösungen

1. Aufgabe:

a) Wir nutzen partielle Integration:

$$\begin{aligned}\int \cos x \sin x \mathrm{d}x &= \sin^2 x - \int \sin x \cos x \mathrm{d}x \\ \Rightarrow 2 \cdot \int \cos x \sin x \mathrm{d}x &= \sin^2 x \\ \Rightarrow \int \cos x \sin x \mathrm{d}x &= \frac{\sin^2 x}{2} + C\end{aligned}$$

b) Wir nutzen zweimal partielle Integration:

$$\begin{aligned}\int \cos x e^x \mathrm{d}x &= e^x \cos x + \int e^x \sin x \mathrm{d}x \\ &= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C\end{aligned}$$

c) Wir nutzen $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ und substituieren $u := e^x, \quad \mathrm{d}x = 1/u \mathrm{d}u$:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cosh x} \mathrm{d}x &= \int \frac{2}{e^x + e^{-x}} \mathrm{d}x \\ &= 2 \int \frac{1}{u + \frac{1}{u}} \frac{1}{u} \mathrm{d}u \\ &= 2 \int \frac{1}{u^2 + 1} \mathrm{d}u \\ &= 2 \arctan(u) + C \\ &= 2 \arctan(e^x) + C\end{aligned}$$

d) Wir substituieren $u := 4x - 3, \quad \mathrm{d}x = 1/4 \mathrm{d}u$:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(4x-3)^3} \mathrm{d}x &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{u^3} \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{u^2} + C\right) \\ &= -\frac{1}{8(4x-3)^2} + C'\end{aligned}$$

e) Mit partieller Integration bekommen wir:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x} \ln(x) \mathrm{d}x &= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} \ln x - \int \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\frac{1}{x} \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} \ln x - \frac{4}{9}\sqrt{x^3} + C \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{x^3}(\ln x - \frac{2}{3}) + C\end{aligned}$$

2. Aufgabe:

a) Im Fall $s < 0$ gilt für $x \geq 1$ schon

$$0 < x^s + x^{\frac{1}{s}} \leq 2,$$

also

$$\frac{1}{x^s + x^{\frac{1}{s}}} \geq \frac{1}{2}.$$

Somit ist das Integral divergent nach Minorantenkriterium.
Im Fall $s \in (0,1)$ folgt

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{x^s + x^{\frac{1}{s}}} \mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1}{x^s + x^{\frac{1}{s}}} \mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{1}{x^s + x^{\frac{1}{s}}} \mathrm{d}x \\ &\geq \frac{1}{2} \int_0^1 x^{-s} \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_1^\infty x^{-\frac{1}{s}} \mathrm{d}x < \infty.\end{aligned}$$

Für $s = 1$ divergiert das Integral (Stichwort: harmonische Reihe).
Für $s > 1$ hat man dieselbe Rechnung wie oben, nur mit den Majoranten vertauscht.

b) Wir substituieren $u := x + 1, \quad \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ und erhalten:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{x+1}} \mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{u-1}{\sqrt{u}} \mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{u}{\sqrt{u}} \mathrm{d}u - \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}} \mathrm{d}u \\ &= \left[\frac{2}{3} u\right]_0^1 - \left[-2u^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = -\frac{4}{3}\end{aligned}$$

c) Für $\alpha = 0$ divergiert das Integral. Für $\alpha \neq 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x} \mathrm{d}x &= -\frac{1}{\alpha} \left[e^{-\alpha x} x^2\right]_0^\infty + \frac{2}{\alpha} \int_0^\infty x e^{-\alpha x} \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{\alpha} \left[e^{-\alpha x} x^2\right]_0^\infty + \frac{2}{\alpha} \left(-\frac{1}{\alpha} \left[e^{-\alpha x} x\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x}\right) \\ &= -\frac{1}{\alpha} \left[e^{-\alpha x} x^2\right]_0^\infty + \frac{2}{\alpha} \left(-\frac{1}{\alpha} \left[e^{-\alpha x} x\right]_0^\infty + \left[\frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha x}\right]_0^\infty\right) \\ &= \frac{2}{\alpha^3}\end{aligned}$$

d) Da $\ln|x|$ symmetrisch ist, können wir schreiben:

$$\int_{-1}^1 \ln|x| \mathrm{d}x = 2 \int_0^1 \ln x \mathrm{d}x$$

Wir nutzen jetzt partielle Integration mit $f' = 1, \quad g = \ln x$ und bilden den Grenzwert:

$$\begin{aligned}2 \int_0^1 \ln x \mathrm{d}x = 2 \left[x \ln x - x\right]_0^1 &= -2 - \lim_{x \to 0} \left(2(x(\ln x - 1))\right) \\ &= -2\end{aligned}$$

e) Wir fügen eine sinnvolle Null hinzu und erhalten mit erweitern:

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x = \int_2^\infty \frac{x+1-x}{(x+1)(x-1)}\mathrm{d}x = \int_2^\infty \frac{\cancel{x+1}}{\cancel{(x+1)}(x-1)}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x$$

Wir wissen, dass gilt $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln(|f(x)|)$. Somit folgt

$$\begin{aligned}
\int_2^\infty \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_2^\infty \frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x &= [\ln(x-1)]_2^\infty - \frac{1}{2}\left[\ln(x^2-1)\right]_2^\infty \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x^2-1)\right) + \frac{1}{2}\ln(3) \\
&= \ln \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}\right) + \frac{1}{2}\ln(3) \\
&= \frac{1}{2}\ln(3)
\end{aligned}$$

f) Wir integrieren partiell und erhalten:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-x}\sin(x)\mathrm{d}x &= \left[-e^{-x}\cos x\right]_0^\infty - \int_0^\infty e^{-x}\cos x\mathrm{d}x \\
&= \left[-e^{-x}\cos x\right]_0^\infty - \left(\left[e^{-x}\sin x\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}\sin x\mathrm{d}x\right) \\
&= \left[-e^{-x}\cos x\right]_0^\infty - \left[e^{-x}\sin x\right]_0^\infty - \int_0^\infty e^{-x}\sin x\mathrm{d}x \\
\Rightarrow 2\cdot\int_0^\infty e^{-x}\sin(x)\mathrm{d}x &= \left[-e^{-x}\cos x\right]_0^\infty - \left[e^{-x}\sin x\right]_0^\infty \\
\Rightarrow \int_0^\infty e^{-x}\sin(x)\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\left[e^{-x}(\sin x + \cos x)\right]_0^\infty \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

3. Aufgabe:

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Wenn man den Hauptsatz der Integralrechnung und dann den Mittelwertsatz der Differentialrechnung auf das Integral

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

anwendet, dann ist es äquivalent zu welchem der folgenden Terme?

- ☐ $f(c)$ an einer Zwischenstelle $c \in [a,b]$.
- ☐ $f'(c)$ an einer Zwischenstelle $c \in [a,b]$.
- ☐ $(b-a)f'(c)$ an einer Zwischenstelle $c \in [a,b]$.
- ☐ $(b-a)f(c)$ an einer Zwischenstelle $c \in [a,b]$.
- ☐ Keine der obigen Antworten ist richtig.

Antwort d) ist richtig. Der Hauptsatz der Integralrechnung besagt, dass es für eine reelwertige, stetige Funktion f auf einem abgeschlossenen Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ eine Stammfunktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ gibt mit $F'(x) = f(x)$ und $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung sagt, dass es für eine auf $[a, b]$ stetige und in (a, b) differentierbare Funktion f mindestens ein $c \in (a, b)$ gibt, so dass $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ gilt. Es folgt also:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= F(b) - F(a) \\
&= F'(c)(b-a) \\
&= f(c)(b-a).
\end{aligned}
$$

Topologie Lösungen

1. Aufgabe:
Wahr oder falsch?
Entscheide, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Beweise oder widerlege.

a) Seien $U_i \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen, $i \in I$ eine beliebige Indexmenge. Dann ist auch $\bigcap\limits_{i\in I} U_i$ offen.

Lösung: Das ist nicht wahr, betrachte dazu folgendes Gegenbeispiel:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $U_n := (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \subset \mathbb{R}$.
Offensichtlich sind dann die U_n alle offen (sogar offene Kugeln in $\mathbb{R}$!), jedoch ist

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \{0\},$$

denn der Schnitt über alle U_n ist genau die Menge der $x \in \mathbb{R}$, die in *allen* U_n liegen, das ist aber nur die 0 (beachte: $\frac{1}{n} \to 0$).
Die Menge $\{0\}$ ist aber nicht offen, denn in jeder Umgebung der 0 liegen auch Elemente $\neq 0$.

b) Jede ein-elementige Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist (folgen-)kompakt.

Lösung: Das ist korrekt: Wir nennen unsere ein-elementige Menge $M := \{x\} \subset \mathbb{R}^n$ und zeigen Folgen-Kompaktheit. Dafür benutzen wir folgende Definition:
Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann folgenkompakt, wenn jede Folge in A eine konvergente Teilfolge hat, deren Grenzwert in A liegt.
Sei also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ eine Folge in M, dann muss $x_n = x$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten, denn M hat nur das Element x. Dann ist aber schon (x_n) selbst konvergent gegen x, da konstant, insbesondere dann auch *jede* Teilfolge. Also ist M folgenkompakt.

Für die Bachelor-Studierenden: Man zeigt auch leicht mit der Heine-Borelschen Überdeckungseigenschaft die Kompaktheit: Sei dafür $\{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $\{x\}$, dann muss x in wenigstens einer der Mengen U_i liegen, z.B. in U_j. Dann ist schon $\{U_j\}$ eine Überdeckung, insbesondere eine endliche.

c) **(B)** Sei $Y \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge des metrischen Raums X und $Z \subset Y$ abgeschlossen in Y (bzgl. der Teilraumtopologie). Dann ist Z abgeschlossen in X.

Lösung: Das stimmt auch: Was bedeutet "abgeschlossen in der Teilraumtopologie"? Es gibt eine abgeschlossene Menge $A \subset X$, sodass $Z = Y \cap A$ ist!
Nun sind aber sowohl Y (nach Voraussetzung) als auch A abgeschlossen in X, folglich auch ihr Schnitt.

d) **(B)** Sei M ein metrischer Raum und $Y \subset M$ zusammenhängend. Dann ist jede beschränkte Teilmenge von Y auch zusammenhängend.

Lösung: Das stimmt nicht, betrachte folgendes Gegenbeispiel:
Sei $M = \mathbb{R}$ und $Y = (0, 1)$. In der Vorlesung haben wir gesehen, dass die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ genau die Intervalle sind, Y ist also zusammenhängend.
Insbesondere ist Y auch beschränkt, also auch jede Teilmenge von Y. Wir betrachten die Teilmenge $Z = (0, \frac{1}{4}) \cup (\frac{3}{4}, 1)$, diese ist dann auch beschränkt, aber nicht zusammenhängend, denn:
Die Mengen $(0, \frac{1}{4})$ und $(\frac{3}{4}, 1)$ sind offen, disjunkt und nicht-leer, aber ihr Vereinigung ganz Z, also Z nicht zusammenhängend.

e) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig. Dann gilt für alle abgeschlossenen Mengen $A \subset \mathbb{R}^m$, dass auch $f^{-1}(A)$ abgeschlossen ist.

Lösung: Das stimmt, und für den Beweis benutzen wir, dass für eine stetige Funktion f für jede offene Menge $V \subset \mathbb{R}^m$ das Urbild $f^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^n$ auch offen ist (für Bachelor-Menschen war das Serie 24.4, für Lehramts-Menschen ist das ein Satz aus der Vorlesung).
Sei jetzt also $A \subset \mathbb{R}^m$ abgeschlossen, wir zeigen dass dann $f^{-1}(A)$ abgeschlossen ist. A abgeschlossen bedeutet, dass $\mathbb{R}^m \backslash A$ offen ist. Nach obigem Satz folgt $f^{-1}(\mathbb{R}^m \backslash A)$ offen.
Was ist aber $f^{-1}(\mathbb{R}^m \backslash A)$? Das sind alle Punkte in $\mathbb{R}^n$, deren Bild in $\mathbb{R}^m$ aber nicht in A liegen. Die Punkte deren Bild in $\mathbb{R}^m$ liegen, ist der ganze $\mathbb{R}^n$, wir haben also alle Punkte, deren Bild nicht in A liegt, also $f^{-1}(\mathbb{R}^m \backslash A) = \mathbb{R}^n \backslash f^{-1}(A)$.
Damit ist $\mathbb{R}^n \backslash f^{-1}(A)$ offen, also $f^{-1}(A)$ abgeschlossen. Das wollten wir zeigen.

2. Aufgabe:

Beweise folgende Aussagen:

a) Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass $\|\cdot\|$ als Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig ist.

Lösung: Wir zeigen, dass die Norm sogar Lipschitz-stetig ist:
Für beliebige $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt mit der umgekehrten Dreiecks-Ungleichung

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

Das ist aber schon Lipschitz-stetigkeit von $\|\cdot\|$ mit der Lipschitz-Konstanten 1, und daraus folgt die Stetigkeit.
Wie folgt daraus nochmal die Stetigkeit? Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ beliebig, $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $\delta = \varepsilon$, dann gilt für alle $y \in B(x_0, \delta)$:

$$|\|x_0\| - \|y\|| \leq \|x - y\| < \delta = \varepsilon.$$

Das ist das ε - δ -Kriterium.

b) Seien $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann ist auch

$$M_1 + M_2 := \{a + b : \quad a \in M_1,\ b \in M_2\}$$

kompakt.

Lösung: Wir wissen, dass im $\mathbb{R}^n$ kompakt äquivalent ist zu abgeschlossen und beschränkt, wir zeigen also, dass $M_1 + M_2$ abgeschlossen und beschränkt ist:
Beschränktheit: Sowohl M_1 als auch M_2 sind beschränkt, da kompakt, es gibt also Konstanten $R_1, R_2 > 0$, sodass gilt

$$\|x\| < R_1 \quad \forall x \in M_1 \qquad \|y\| < R_2 \quad \forall y \in M_2.$$

Sei nun $z \in M_1 + M_2$ beliebig, das heißt es gibt $x \in M_1$, $y \in M_2$ mit $z = x + y$.
Dann ist mit der Dreiecksungleichung

$$\|z\| = \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| < R_1 + R_2 =: R.$$

Also ist $\|z\| < R$ für alle $z \in M_1 + M_2$, also $M_1 + M_2$ beschränkt.

Abgeschlossenheit: Wir benutzen das Kriterium, nach dem eine Menge genau dann abgeschlossen ist, wenn der Grenzwert jeder konvergenten Folge aus der Menge wieder ein Element der Menge ist.
Sei also $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M_1 + M_2$ eine konvergente Folge, dann existieren insbesondere zwei Folgen $(x_n) \subset M_1$

und $(y_n) \subset M_2$, sodass $z_n = x_n + y_n$ gilt.
Es sind aber M_1, M_2 (folgen-)kompakt, das heißt die Folge (x_n) besitzt eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) mit $x_{n_k} \to x \in M_1$.
Analog finden wir eine Teilfolge $y_{n_k} \to y \in M_2$. Dann gilt auch für die Teilfolge von (z_n):

$$z_{n_k} = x_{n_k} + y_{n_k} \to x + y \in M_1 + M_2.$$

Wir hatten aber (z_n) als konvergent vorausgesetzt, und wir wissen, dass dann auch jede Teilfolge gegen den gleichen Grenzwert konvergiert wie (z_n), also gilt auch

$$z_n \to x + y \in M_1 + M_2.$$

Das ist was wir zeigen wollten.

3. Aufgabe:

Welche der folgenden Mengen sind offen?

- ☒ $M_1 := B(0,1)\backslash\{0\} \subset \mathbb{R}^n$.
- ☐ $M_2 := \{(p,q) \in \mathbb{R}^2 : \quad p \in \mathbb{Q} \text{ oder } q \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}^2$
- ☒ $M_3 := \{x \in \mathbb{R} : \quad e^x + \sin(x) \in (2,5)\}$
- ☐ $M_4 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad z = 5\}$
- ☐ $M_5 := \{x \in \mathbb{R}^n : \quad \|x\|_2^2 = 1\}$
- ☒ $M_6 := \mathbb{R}\backslash(\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : \quad n \in \mathbb{N}\})$

Welche sind beschränkt?

☒ M_1 ☐ M_2 ☒ M_3 ☐ M_4 ☒ M_5 ☐ M_6

Lösungen Mathe-Nacht:

Lokale Approximation

1\. 1) c)

2) b), c)

3) a), c), d)

2\. a) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ ist als Komposition 3-mal stetig diffbarer Funktionen selbst 3-mal stetig diffbar.

$f'(x) = \cos(x) - \sin(x)$

$f''(x) = -\sin(x) - \cos(x)$

Taylorpolynom $T_2(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k$

$$= f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2$$

$$= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0) x^2$$

$$= 1 + x - \frac{x^2}{2}$$

$$= -\frac{x^2}{2} + x + 1$$

b) Beh.: $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt $|f(x) - T_2(x)| \leq \frac{1}{3} |x|^3$.

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig.

Es ist $|f(x) - T_2(x)| = |R_2(x)|$.

Nun gilt, dass zu jedem $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, ein ξ zwischen $x_0=0$ und x existiert, so, dass

$$R_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!} (x-0)^3$$

ist.

Es folgt: $|f(x) - T_2(x)| = \left| \frac{f'''(\xi)}{3!} x^3 \right|$

$$= \left| \frac{x^3}{6} \cdot (\underbrace{-\cos(\xi)}_{\leq 1} + \underbrace{\sin(\xi)}_{\leq 1}) \right|$$

$$\leq \left| \frac{x^3}{6} \cdot 2 \right| = \left| \frac{x^3}{3} \right| = \frac{1}{3} |x|^3$$

$\square$

3. a) Berechne einige Ableitungen von f, um eine Gesetzmäßigkeit zu erkennen & die k-te Ableitung aufstellen zu können.

f ist ∞-mal stetig diffbar, da es eine Komposition ∞-mal stetig diffbarer Funktionen ist.

$f(x) = -\ln(1-\frac{x}{2})$

$f'(x) = -\frac{1}{1-\frac{x}{2}} \cdot (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2(1-\frac{x}{2})} = \frac{1}{2-x}$

$f''(x) = -\frac{1}{(2-x)^2} \cdot (-1) = \frac{1}{(2-x)^2}$

$f'''(x) = -2 \cdot \frac{1}{(2-x)^3} \cdot (-1) = \frac{2}{(2-x)^3}$

$f''''(x) = -6 \cdot \frac{1}{(2-x)^4} (-1) = \frac{6}{(2-x)^4}$

$\vdots$

$f^{(k)}(x) = \frac{(k-1)!}{(2-x)^k}$

Die Taylor-Reihe in $x_0 = 0$ ist damit gegeben durch:

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k-1)!}{k!(2-x_0)^k} (x-x_0)^k$$

$$\overset{x_0=0}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k-1)!}{k! \cdot 2^k} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k \cdot 2^k}.$$

b) $f(x) = T(x) \iff R_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$.

4. Es ist $f \in C^2(0,+\infty)$, da $f'(x) = e^x + xe^x - 5e^x = (x-4)e^x$ & $f''(x) = e^x + (x-4)e^x = (x-3)e^x$ sind & somit sind $f', f'' \in C^0(0,+\infty)$.

Es gilt außerdem $f(\frac{9}{2}) \cdot f(5) < 0$, da:

- $f(\frac{9}{2}) = (\frac{9}{2} - 5)e^{\frac{9}{2}} + 5 = -\frac{1}{2}e^{\frac{9}{2}} + 5 \underset{\uparrow}{<} -\frac{1}{2} 2^4 + 5 < 0$

  $e \approx 2{,}72 \Rightarrow -e^{\frac{9}{2}} < -2^{\frac{9}{2}} < -2^4$

- $f(5) = (5-5)e^5 + 5 = 5$

Zudem ist $f''(x) = (x-3)e^x \geq 0$, da $x - 3 \geq \frac{3}{2}$ & $e^x > 0$, $\forall x \in I$.

Und es ist für alle $x \in I$ $f'(x) = (x-4)e^x > 0$, da $x-4 \geq 0{,}5$ & $e^x > 0$, $\forall x \in I$. Damit ist $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$.

Somit gilt lt. Vorl. (S. 8.3.1), dass die Folge (x_n) rekursiv definiert durch $x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n-5)e^{x_n}+5}{(x_n-4)e^{x_n}}$ für jeden Startwert $x_0 \in I$ gegen ξ konvergiert für $n \to \infty$

5. im Allg. gilt: $T(f(x), x_0)(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)(x-x_0)^3$

Es gilt: $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$, $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$

$f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$

$f(1) = \sqrt{1} = 1$

$f'(1) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$

$f''(1) = -\frac{1}{4\cdot 1^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{4}$

$f'''(1) = \frac{3}{8\cdot 1^{\frac{5}{2}}} = \frac{3}{8}$

$$T(\sqrt{x}, 1)(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3$$
$$= \frac{1}{16}\left(16 + 8(x-1) - 2(x-1)^2 + (x-1)^3\right)$$

=> in die Lücken muss: 16; 8; -2; 1

Extrema-Lösungen

① $\partial_1 f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_x(x,y) = 3x^2 - 6xy + 3y^2 - 3$

$\partial_2 f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_y(x,y) = -3x^2 + 6xy + 3y^2 - 21$

Es seien (x_i, y_i), $i \in \{1, \dots, 4\}$ Punkte, die die notw. Bed. $f_x(x_i,y_i) = f_y(x_i,y_i) = 0$ erfüllen.

$x_1 = 3 \rightarrow 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 \cdot y_1 + 3y_1^2 - 3 \overset{!}{=} 0 \quad \wedge \quad -3 \cdot 3^2 + 18y_1 + 3y_1^2 - 21 = 0$

$\Leftrightarrow 27 - 18y_1 + 3y_1^2 - 3 \overset{!}{=} 0 \quad \wedge \quad -27 + 18y_1 + 3y_1^2 - 21 = 0$

$\Leftrightarrow y_1^2 - 6y_1 + 8 \overset{!}{=} 0 \quad \wedge \quad y_1^2 + 6y_1 - 16 = 0$

$\Leftrightarrow y_1 \in \{+3 + \sqrt{9-8}, 3 - \sqrt{9-8}\} \quad \wedge \quad y_1 \in \{-3 + \sqrt{9+16}, -3 - \sqrt{9+16}\}$

$= \{4, 2\} \qquad = \{2, -8\}$

$\Leftrightarrow y_1 = 2$

$x_2 = -3 \rightarrow 3 \cdot (-3)^2 - 6 \cdot (-3) \cdot y_2 + 3y_2^2 - 3 = 0 \quad \wedge \quad -3 \cdot (-3)^2 + 6 \cdot (-3) y_2 + 3y_2^2 - 21 = 0$

$\Leftrightarrow 27 + 18y_2 + 3y_2^2 - 3 = 0 \quad \wedge \quad -27 - 18y_2 + 3y_2^2 - 21 = 0$

$\Leftrightarrow y_2^2 + 6y_2 + 8 = 0 \quad \wedge \quad y_2^2 - 6y_2 - 16 = 0$

$\Leftrightarrow y_2 \in \{-3 + \sqrt{9-8}, -3 - \sqrt{1}\} \quad \wedge \quad y_2 \in \{+3 + \sqrt{25}, 3 - \sqrt{25}\}$

$= \{-2, -4\} \quad \wedge \quad y_2 \in \{8, -2\}$

$\Leftrightarrow y_2 = -2$

$x_3 = 1 \rightarrow 3 \cdot 1 - 6 \cdot 1 \cdot y_3 + 3y_3^2 - 3 = 0 \quad \wedge \quad -3 \cdot 1 + 6y_3 + 3y_3^2 - 21 = 0$

$\Leftrightarrow y_3(-6 + 3y_3) = 0 \quad \wedge \quad y_3^2 + 2y_3 - 8 = 0$

$\Leftrightarrow y_3 \in \{0, 2\} \quad \wedge \quad y_3 \in \{-4, 2\}$

$\Leftrightarrow y_3 = 2$

$x_4 = -1 \rightarrow 3 + 6y_4 + 3y_4^2 - 3 = 0 \quad \wedge \quad -3 - 6y_4 + 3y_4^2 - 21 = 0$

$\Leftrightarrow y_4(6 + 3y_4) = 0 \quad \wedge \quad y_4^2 - 2y_4 - 8 = 0$

$\Leftrightarrow y_4 \in \{0, -2\} \quad \wedge \quad y_4 \in \{4, -2\}$

$\Leftrightarrow y_4 = -2$

② Es ist $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2\delta x$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2\varepsilon y$.

Im Punkt $(0,0)$ gilt $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. $\Rightarrow$ notw. Bed. erfüllt.

Hessematrix: Es ist $f_{xx}(x,y) = 2\delta$, $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 0$, $f_{yy}(x,y) = 2\varepsilon$.

Somit sieht die Hessematrix wie folgt aus:

$$\begin{pmatrix} 2\delta & 0 \\ 0 & 2\varepsilon \end{pmatrix}$$

Für $\varepsilon = \delta = 1$ ist $2 > 0$ der einzige Eigenwert $\Rightarrow$ positiv definit
$\Rightarrow$ Minimum

Für $\varepsilon = \delta = -1$ ist $-2 < 0$ der einzige Eigenwert $\Rightarrow$ negativ definit
$\Rightarrow$ Maximum

Für $\varepsilon = 1, \delta = -1$ sind 2 und -2 Eigenwerte $\Rightarrow$ indefinit
$\Rightarrow$ Sattelpunkt

$\varepsilon = \delta = 1$	Lokales Minimum
$\varepsilon = \delta = -1$	Lokales Maximum
$\varepsilon = 1, \delta = -1$	Sattelpunkt

③ Es ist $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_x(x,y) = -\sin(x)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_y(x,y) = 2y+2$,

$f_{xx}(x,y) = -\cos(x)$, $f_{yy}(x,y) = 2$, $f_{xy}(x,y) = 0 = f_{yx}(x,y)$.

Gesucht sind alle $(x,y) \in D$ mit $-\sin(x) = 0 = 2y+2$.

Dies sind alle $(x,y) \in \{(x,-1) \mid \exists k \in \mathbb{N}: x = k \cdot \pi\}$.

Sei $(a,-1)$ ein solcher kritischer Punkt. Dann gilt

$f_{xx}(a,b) = -1$, falls $a = k \cdot \pi$ mit k gerade

$f_{xx}(a,b) = 1$, falls $a = k \cdot \pi$ mit k ungerade

$f_{yy}(a,b) = 2$

$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b) = 0$

Sei $(a,-1) \in D$ mit $a = k \cdot \pi$ mit einer geraden, natürlichen Zahl k

Dann sieht die Hessematrix wie folgt aus: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ indefinit
$\Rightarrow$ kein Extremum

Sei $(a,-1) \in D$ mit $a = k \cdot \pi$ mit einer ungeraden, natürlichen Zahl k.

Dann sieht die Hessematrix wie folgt aus: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ → positiv definit → Minimum

$\Rightarrow$ In allen Pkt.en $(a,-1) \in D$ mit $a = k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{N}$ ungerade, liegt ein lokales Minimum vor.

Handelt es sich dabei auch um ein globales Minimum?

Es ist $f(a,-1) = \cos(a) - 1(-1+2) = \cos(a) - 1 = -1-1 = -2$,

wenn $a = k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{N}$, ungerade.

Für alle $(x,y) \in D$ gilt:

$$f(x,y) = \underbrace{\cos(x)}_{\geq -1} + y(y+2) \geq -1 + y^2 + 2y = -1 + (y+1)^2 - 1$$
$$= -2 + (y+1)^2$$
$$\geq -2 = f(a,-1)$$

Somit sind die lokalen Minima auch globale.

Gibt es globale Maxima? Nein, denn:

$$\lim_{y \to \infty} f(0,y) = \lim_{y \to \infty} 1 + y(y+2) = +\infty$$

4) $f(x,y) = \operatorname{Im}((x+iy)^3) = \operatorname{Im}((x^2 + 2ixy - y^2) \cdot (x+iy))$

$$= \operatorname{Im}(x^3 + ix^2y + 2ix^2y - 2xy^2 - xy^2 - iy^3)$$
$$= \operatorname{Im}(x^3 - 2xy^2 - xy^2 + i(3x^2y - y^3))$$
$$= 3x^2y - y^3$$

Es ist $f_x(x,y) = 6xy$, $f_y(x,y) = 3x^2 - 3y^2$. Im Punkt $(0,0)$ gilt $f_x(0,0) = 0 = f_y(0,0)$. Weiter ist $f_{xx}(x,y) = 6y$, $f_{yy}(x,y) = -6y$, $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 6x$. Somit ergibt sich in $(0,0)$ folgende Hessematrix: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ → positiv semidefinit und negativ semidefinit → zunächst keine Aussage möglich.

In $(0,0)$ gilt: $f(0,0) = 0$. Weiter gilt für alle $(0,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $y > 0$: $f(0,y) = -y^3 < 0 = f(0,0)$

Für alle $(0,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $y < 0$ gilt: $f(0,y) = -y^3 > 0 = f(0,0)$

Somit liegt in $(0,0)$ kein Extremum vor.

⑤ $f(x) = \|x\|_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_d^2$

Nebenbedingung: $(a|x)_2 = 1 \iff a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_d x_d = 1$.

Gesucht sind die Extrema $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$ der Fkt. f unter der Nebenbedingung

$$g\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} = a_1 x_1 + \ldots + a_d x_d - 1 = 0$$

Ist $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$ ein Extremum unter der NB $g(x)$, so ex. laut Vorlesung* ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\nabla f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} = \lambda \cdot \nabla g\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}, \text{ also}$$

$$\begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ \vdots \\ 2x_d \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix}$$

* falls $\nabla g\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \neq 0$

Somit gilt $x_1 = \frac{\lambda}{2} a_1, \ldots, x_d = \frac{\lambda}{2} a_d$. Gleichzeitig soll die NB gelten. Also $a_1 \cdot \frac{\lambda}{2} a_1 + a_2 \cdot \frac{\lambda}{2} a_2 + \ldots + a_d \cdot \frac{\lambda}{2} a_d - 1 = 0$.

Daraus folgt: $\frac{\lambda}{2} \cdot (a_1^2 + \ldots + a_d^2) = 1 \Rightarrow \|a\|_2^2 = \frac{2}{\lambda}$

Ist $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$ ein Extremum unter der NB, so gilt also:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} = \frac{\lambda}{2} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} = \frac{\lambda}{2} \cdot a = \frac{\lambda}{2} \cdot \|a\|_2^2 \frac{a}{\|a\|_2^2} = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{a}{\|a\|_2^2}$$

$$= \boxed{\frac{a}{\|a\|_2^2}}$$

⑥ $f(x,y) = x \cdot y$ Nebenbedingung: $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ $\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \neq (0,0)$ für alle (x,y) auf dem Einheitskreis.

Ist (x_0, y_0) ein Extr. unter der NB, so ex. $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ x_0 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

I $y_0 = 2\lambda x_0$

II $x_0 = 2\lambda y_0$

III $x_0^2 + y_0^2 - 1 = 0$

Setze I in II ein: $x_0 = 2 \cdot \lambda \cdot 2 \cdot \lambda \cdot x_0$
$\rightarrow x_0 = 4\lambda^2 x_0$
$\rightarrow (1 - 4\lambda^2) x_0 = 0$

Es ist $x_0 \neq 0$ (sonst wäre $y_0 = 0$ und NB nicht erfüllt) und somit folgt $\lambda = \frac{1}{2}$ oder $\lambda = -\frac{1}{2}$

1. Fall: $\lambda = \frac{1}{2}$. Dann folgt

$\underline{\text{III}}$ $x_0^2 + 4\lambda^2 x_0^2 - 1 = 0$

$x_0^2 + x_0^2 - 1 = 0$

$2x_0^2 = 1 \Rightarrow x_0^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_0 = \sqrt{\frac{1}{2}}$ oder $x_0 = -\sqrt{\frac{1}{2}}$

Ist $x_0 = \sqrt{\frac{1}{2}}$, so folgt $y_0 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

Ist $x_0 = -\sqrt{\frac{1}{2}}$, so folgt $y_0 = -\sqrt{\frac{1}{2}}$

2. Fall: $\lambda = -\frac{1}{2}$. Dann folgt wieder aus $\underline{\text{III}}$. $x_0 = \sqrt{\frac{1}{2}}$ oder $x_0 = -\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Mit I folgt dann:

Ist $x_0 = \sqrt{\frac{1}{2}}$, so folgt $y_0 = -\sqrt{\frac{1}{2}}$

Ist $x_0 = -\sqrt{\frac{1}{2}}$, so folgt $y_0 = +\sqrt{\frac{1}{2}}$

Insgesamt ergeben sich die 4 Stellen:

$(\underbrace{\sqrt{\tfrac{1}{2}}}_{x_1}, \underbrace{\sqrt{\tfrac{1}{2}}}_{y_1}), (\underbrace{\sqrt{\tfrac{1}{2}}}_{x_2}, \underbrace{-\sqrt{\tfrac{1}{2}}}_{y_2}), (\underbrace{-\sqrt{\tfrac{1}{2}}}_{x_3}, \underbrace{+\sqrt{\tfrac{1}{2}}}_{y_3}), (\underbrace{-\sqrt{\tfrac{1}{2}}}_{x_4}, \underbrace{-\sqrt{\tfrac{1}{2}}}_{y_4})$

Es ist $f(x_1, y_1) = \frac{1}{2} = f(x_4, y_4)$ und

$f(x_2, y_2) = -\frac{1}{2} = f(x_3, y_3)$

Somit folgt:

- lokale Minima: $(\underline{\sqrt{\tfrac{1}{2}}}, \underline{-\sqrt{\tfrac{1}{2}}}), (\underline{-\sqrt{\tfrac{1}{2}}}, \underline{\sqrt{\tfrac{1}{2}}})$
- lokale Maxima: $(\underline{\sqrt{\tfrac{1}{2}}}, \underline{\sqrt{\tfrac{1}{2}}}), (\underline{-\sqrt{\tfrac{1}{2}}}, \underline{-\sqrt{\tfrac{1}{2}}})$

$x^2 + z^3 + z = 0$

· Aufstellen von F : $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^x + \tan(y) - 1 \\ x^2 + z^3 + z \end{pmatrix}$,

also $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

· F ist offensichtlich stetig diffbar in Umgebung von

$(0,0,0)$ $\quad \left(\tan(0) = 0 \right.$, $\left.(\tan'(x))\right|_{x=0} = \left.\frac{1}{\cos^2(x)}\right|_{x=0}$

$= 1$

· $F(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 + 0 - 1 \\ 0 + 0 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

· $D_{(y,z)} F\Big|_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos^2(y)} & 0 \\ 0 & 3z^2+1 \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ist invertierbar

$\Rightarrow$ Satz d. impl. Fkt. anwendbar

$\frac{\partial y}{\partial x}(x) = -\begin{pmatrix} 3z^2+1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cos^2(y)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^x \\ 2x \end{pmatrix}$

$= -\begin{pmatrix} 3z^2 e^x + e^x \\ \frac{2x}{\cos^2(y)} \end{pmatrix}$ $\quad$ y-Komponente m.f. $\forall x \in D_f$.

z-Komp. nicht monoton (Extr. in $x=0$, für $x<0$ m.f., $x>0$ m.w.)

$\frac{\partial(y,z)}{\partial x}(0) = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) $\quad x^2 + y^2 = 2uv$

$x^3 + y^3 = v^3 - u^3$

· Aufstellen von F : $F(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} x^2+y^2-2uv \\ x^3+y^3-v^3+u^3 \end{pmatrix}$

also $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$

· F ist offensichtlich stetig diffbar (Polynomfkt.)

$F(-1,1,1,1) \quad (-1+1-1+1) \quad (0)$

$$\frac{\partial F}{\partial(u,v)}(-1,1,1,1) = \begin{pmatrix} -2v & -2u \\ 3u^2 & -3v^2 \end{pmatrix}\Bigg|_{(-1,1,1,1)}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

ist invertierbar, da $\det(\ldots) = 6+6 = 12$

$$\frac{\partial g}{\partial(x,y)} = -\frac{1}{6v^3+6u^3}\begin{pmatrix} -3v^2 & 2u \\ -3u^2 & -2v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 3x^2 & 3y^2 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{6v^3+6u^3}\begin{pmatrix} -6v^2x + 6ux^2 & -6v^2y + 6y^2u \\ -6xu^2 - 6vx^2 & -6u^2y - 6vy^2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial g}{\partial(x,y)}(-1,1,1,1) = -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1$$

3) a) $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sin(x) = x$

Sei $f: [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sin(x)$

$|f(x) - f(y)| = \frac{1}{2}|\sin(x) - \sin(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|$

denn $|\sin'(x)| = |\cos(x)| < 1$

$\Rightarrow$ f ist Kontraktion $\underset{\text{Banach FPS}}{\Longrightarrow}$ f besitzt eindeutigen Fixpunkt

$\Rightarrow$ Gleichung eindeutig lösbar

b) $x^2 + 3 = e^x \quad \rightsquigarrow \quad \ln(x^2+3) = x$

Sei $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2+3)$

$|f'(x)| = \left|\frac{2x}{x^2+3}\right| < 1$, denn

$0 < (x-1)^2 < x^2 - 2x + 3 \quad \to \quad 2x < x^2 + 3$

4) a) falsch, siehe Vorlesung

b) richtig, siehe Vorlesung

c) falsch, da $= 1$ zugelassen ist
(Gegenbsp. $f(x) = x$)

Lösungen Stetigkeit
Diffbarkeit

10. Mathenacht Analysis

(1.) Gilt nicht!

Gegenbeispiel: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Es gilt $f(x,0) = f(0,y) = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

$\Rightarrow$ partiell diffbar in $x_0 = (0,0)$

Zur Stetigkeit: Folgenkriterium

Betrachte die Folge $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$

Es ist $\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = (0,0)$ und

$f(0,0) = 0$

Jedoch ist $\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$

$\Rightarrow$ Unstetigkeit in $x_0 = (0,0)$

(2) a) Ist stetig

Es gilt für alle $c \in \mathbb{R}$:

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{c}\right) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad -|c| \leq c\sin\left(\frac{1}{c}\right) \leq |c|$$

mit Sandwich-Theorem folgt für $c \to 0$

$$\lim_{c \to 0} c \cdot \sin\left(\frac{1}{c}\right) = 0$$

$\Rightarrow$ Stetigkeit in $(0,0)$ mit $c = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$

b) Ist differenzierbar

Mehrere Möglichkeiten.

Eine Möglichkeit:

Es ist $\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix}$ mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f((0,0) + h \cdot e_1) - f(0,0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f((0,0) + h \cdot e_2) - f(0,0)}{h}$$

mit $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

f ist ~~un~~ diffbar wenn $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\lim_{h \to (0,0)} \frac{\| f((0,0) + (h_1,h_2)) - f(0,0) - \nabla f(0,0) \cdot (h_1,h_2) \|}{\| h \|}$$

$$= 0$$

$$\lim_{h \to (0,0)} \frac{\| f(h_1,h_2) - 0 - \binom{0}{0}(h_1,h_2) \|}{\|h\|}$$

$$= \lim_{h \to (0,0)} \frac{(h_1^2+h_2^2)\sin\left(\frac{1}{h_1^2+h_2^2}\right)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$= \lim_{h \to (0,0)} \sqrt{h_1^2+h_2^2} \cdot \sin\left(\frac{1}{h_1^2+h_2^2}\right)$$

$= 0$ (vgl. a)) ∎

3 a) nicht stetig in $(0,0)$

Betrachte Folge $a_n = (x_n, y_n)$ mit $x_n = y_n$

und $\lim_{n \to \infty} a_n = a = 0$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\sin(x)\sin(y)}{x^2+y^2} = \lim_{a_n \to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(a_n)}{a_n}\right)^2$$

l'Hospital

$= \frac{1}{2} \cdot 1 \neq 0$

$\Rightarrow$ nicht stetig in $(0,0)$

b) $$\lim_{t \to 0} \frac{\frac{\sin(t)\sin(0)}{t^2+0} - 0}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin(t)\sin(0)}{t^3}$$

$$= 0 = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

c) nicht stetig $\Rightarrow$ nicht differenzierbar

(4) Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2y(x^2+y^2) - 2xy2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

und in $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0$$

Wähle die Folge $(0, \frac{1}{n})_{n \geq n_0}$, $\frac{1}{n_0} < r$

Diese liegt in $B_r(0,0)$

Dann ist $\frac{\partial f}{\partial x}(0,\frac{1}{n}) = 2n \xrightarrow{n \to \infty} \infty$

Wähle $(\frac{1}{n}, 0)_{n \geq n_0}$ um die Unbeschränktheit von $\frac{\partial f}{\partial y}$ zu zeigen.

(5) a) $\|v\| = 1$

$$\partial_v f(\xi) = \lim_{t \to 0} \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(1+\frac{t}{2})(2+\frac{t\sqrt{3}}{2})\right) - \sin(1)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\sin\left(1 + \frac{t\sqrt{3}}{4} + \frac{t}{2} + \frac{\sqrt{3}t^2}{8}\right) - \sin(1)}{t}$$

$$\overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{t \to 0} \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}t}{4}\right)\cos\left(1 + \frac{t\sqrt{3}}{4} + \frac{t}{2} + \frac{\sqrt{3}t^2}{8}\right)}{1}$$

$$= \frac{2+\sqrt{3}}{4}\cos(1)$$

$$\nabla f(\xi) = \left(\tfrac{1}{2}\xi_2 \cos\left(\tfrac{1}{2}\xi_1 \xi_2\right), \tfrac{1}{2}\xi_1 \cos\left(\tfrac{1}{2}\xi_1 \xi_2\right)\right)$$

$$= \left(\cos(1), \tfrac{1}{2}\cos(1)\right) \qquad \text{(steilster Anstieg)}$$

b) $\|v\| = \sqrt{6}$

$$\partial_v f(\xi) = \lim_{t \to 0} \frac{e^{\left(1+\frac{t}{\sqrt{6}}\right)\left(1+\frac{2t}{\sqrt{6}}\right)\left(1-\frac{t}{\sqrt{6}}\right)} - e^1}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{e^{1+\frac{2t}{\sqrt{6}} - \frac{1}{6}t^2 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^3 t^3} - e^1}{t}$$

$$\overset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{t \to 0} \left(\frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{2}{6}t - 6\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^3 t^2\right) e^{1+\frac{2t}{\sqrt{6}} - \frac{1}{6}t^2 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^3 t^3}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{6}} e$$

$$\nabla f(\xi) = (e, e, e)$$

6. Aufgabe:

Sei $f(x, y, z) = x^{y/z}$. Ordne jeweils einem Term aus der ersten Gruppe einer partiellen Ableitung aus der 2. Gruppe zu:

$$G_1 : \frac{y}{z} x^{y/z-1}, \quad \frac{ln(x)}{z} x^{y/z}, \quad \frac{-ln(x)y}{z^2} x^{y/z}, \quad \frac{ln(x)^2}{z^2} x^{y/z}, \quad \frac{y^2 - yz}{z^2} x^{y/z-2}$$

$$G_2 : \partial_{yy} f, \quad \partial_z f, \quad \partial_y f, \quad \partial_x f, \quad \partial_{xx} f$$